

## Esquema Tres niveles de tiempo

Hallar el perfil de flujo usando  $\Delta x = 40$  m,  $\Delta t = 10$  h y  $D = 1 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s, para un tiempo final de 20 h

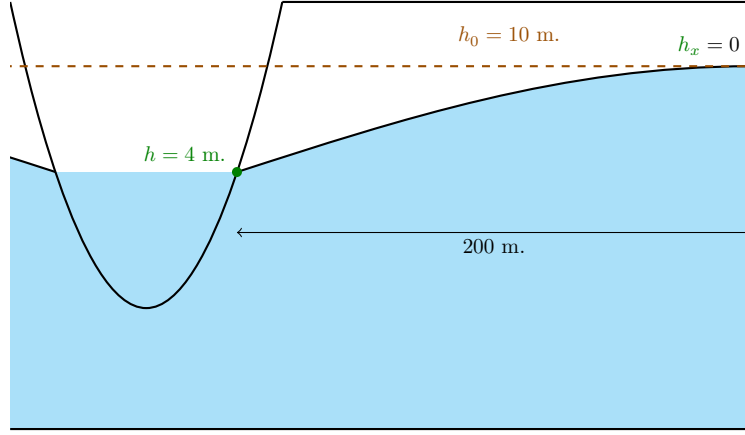


Figura 1: Representación gráfica del ejemplo

La ecuación y las condiciones de contorno serán

$$\frac{\partial h}{\partial t} - D \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$h(x, 0) = 10 \quad (2)$$

$$h(0, t) = 4 \quad (3)$$

$$h_x(200, t) = 0 \quad (4)$$

Discretización espacial

$$N_{\text{elementos}} = \frac{L}{\Delta x} = \frac{200}{40} = 5$$

$$N_{\text{puntos}} = N_{\text{elementos}} + 1 = 5 + 1 = 6$$

Discretización temporal

$$N_{\text{elementos}} = \frac{t}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2$$

$$N_{\text{puntos}} = N_{\text{elementos}} + 1 = 2 + 1 = 3$$

Discretización numérica

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{3h_i^{n+1} - 4h_i^n + h_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

a partir del esquema  $\theta$  o esquema generalizado de Crank-Nicolson

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \theta \left( \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + (1 - \theta) \left( \frac{h_{i-1}^n - 2h_i^n + h_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

reemplazando  $\theta = 1$  (puede usarse otro valor)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{3h_i^{n+1} - 4h_i^n + h_i^{n-1}}{2\Delta t} - D \left( \frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \right) = 0$$

Reordenando

$$-D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_{i-1}^{n+1} + \left( 3 + 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) h_i^{n+1} - D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} h_{i+1}^{n+1} = 4h_i^n - h_i^{n-1}$$

Realizando un cambio de variable

$$a = -D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$b = 3 + 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$c = -D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$d_i = 4h_i^n - h_i^{n-1}$$

El esquema será

$$a h_{i-1}^{n+1} + b h_i^{n+1} + c h_{i+1}^{n+1} = d_i$$

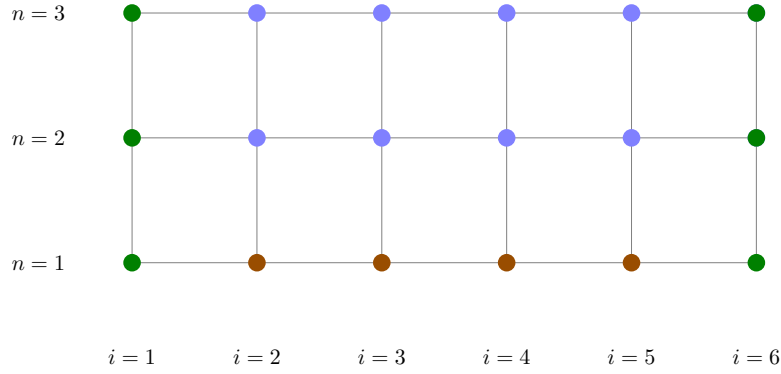


Figura 2: Mallado

3	$h_1^3$	$h_2^3$	$h_3^3$	$h_4^3$	$h_5^3$	$h_6^3$
2	$h_1^2$	$h_2^2$	$h_3^2$	$h_4^2$	$h_5^2$	$h_6^2$
1	$h_1^1$	$h_2^1$	$h_3^1$	$h_4^1$	$h_5^1$	$h_6^1$
	1	2	3	4	5	6

Figura 3: Matriz solución

El esquema es incondicionalmente estable para cualquier  $\lambda$

$$D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.001 \left( \frac{36000}{40^2} \right) = 0.0225$$

Reemplazando las condiciones de contorno, para  $i = 1$  y  $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}h_1^1 &= 4 \\h_1^2 &= 4 \\h_1^3 &= 4\end{aligned}$$

Para  $i = 2, 3, 4, 5$  y  $n = 1$

$$\begin{aligned}h_2^1 &= 10 \\h_3^1 &= 10 \\h_4^1 &= 10 \\h_5^1 &= 10\end{aligned}$$

Para  $i = 6$  y  $n = 1$ , usando un esquema hacia atrás

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_6^1 - h_5^1}{\Delta x} = 0$$

reordenando

$$\begin{aligned}h_6^1 &= h_5^1 \\&= 10\end{aligned}$$

3	4	$h_2^3$	$h_3^3$	$h_4^3$	$h_5^3$	$h_6^3$
2	4	$h_2^2$	$h_3^2$	$h_4^2$	$h_5^2$	$h_6^2$
1	4	10	10	10	10	10
	1	2	3	4	5	6

Figura 4: Matriz solución para  $t = 0$  h

Las constantes  $a, b, c$  serán

$$\begin{aligned}a &= -0.0225 \\b &= 3 + 2(0.0225) = 3.045 \\c &= -0.0225\end{aligned}$$

Debido a que el esquema contiene el término  $h_i^{n-1}$ , no puede obtenerse soluciones para la fila  $n = 2$ , para esta fila se usará el esquema implícito de Euler (puede usarse cualquier otro esquema).

3	4	$h_2^3$	$h_3^3$	$h_4^3$	$h_5^3$	$h_6^3$
2	4	9.87075	9.99721	9.99994	9.99999	9.99999
1	4	10	10	10	10	10
	1	2	3	4	5	6

Figura 5: Matriz solución para  $t = 10$  h

Para  $i = 2$  y  $n = 2$

$$-0.0225h_1^3 + 3.045h_2^3 - 0.0225h_3^3 = d_2$$

$$d_2 = 4h_2^2 - h_2^1 = 4(9.87075) - 10 = 29.483$$

Para  $i = 3$  y  $n = 2$

$$-0.0225h_2^3 + 3.045h_3^3 - 0.0225h_4^3 = d_3$$

$$d_3 = 4h_3^2 - h_3^1 = 4(9.99721) - 10 = 29.98884$$

Para  $i = 4$  y  $n = 2$

$$-0.0225h_3^3 + 3.045h_4^3 - 0.0225h_5^3 = d_4$$

$$d_4 = 4h_4^2 - h_4^1 = 4(9.99994) - 10 = 29.99976$$

Para  $i = 5$  y  $n = 2$

$$-0.0225h_4^3 + 3.045h_5^3 - 0.0225h_6^3 = d_5$$

$$d_5 = 4h_5^2 - h_5^1 = 4(9.99999) - 10 = 29.99996$$

Formando un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -0.0225h_1^3 + 3.045h_2^3 - 0.0225h_3^3 &= 29.483 \\ -0.0225h_2^3 + 3.045h_3^3 - 0.0225h_4^3 &= 29.98884 \\ -0.0225h_3^3 + 3.045h_4^3 - 0.0225h_5^3 &= 29.99976 \\ -0.0225h_4^3 + 3.045h_5^3 - 0.0225h_6^3 &= 29.99996 \end{aligned}$$

Reemplazando  $h_1^3 = 4$  y  $h_6^3 = h_5^3$

$$\begin{aligned} -0.0225(4) + 3.045h_2^3 - 0.0225h_3^3 &= 29.483 \\ -0.0225h_2^3 + 3.045h_3^3 - 0.0225h_4^3 &= 29.98884 \\ -0.0225h_3^3 + 3.045h_4^3 - 0.0225h_5^3 &= 29.99976 \\ -0.0225h_4^3 + 3.045h_5^3 - 0.0225h_5^3 &= 29.99996 \end{aligned}$$

Simplificando y reordenando

$$\begin{aligned}
 3.045 h_2^3 - 0.0225 h_3^3 &= 29.573 \\
 -0.0225 h_2^3 + 3.045 h_3^3 - 0.0225 h_4^3 &= 29.98884 \\
 -0.0225 h_3^3 + 3.045 h_4^3 - 0.0225 h_5^3 &= 29.99976 \\
 -0.0225 h_4^3 + 3.0225 h_5^3 &= 29.99996
 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 3.045 & -0.0225 & 0 & 0 \\ -0.0225 & 3.045 & -0.0225 & 0 \\ 0 & -0.0225 & 3.045 & -0.0225 \\ 0 & 0 & -0.0225 & 3.0225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2^3 \\ h_3^3 \\ h_4^3 \\ h_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.573 \\ 29.98884 \\ 29.99976 \\ 29.99996 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} h_2^3 \\ h_3^3 \\ h_4^3 \\ h_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.78583 \\ 9.99475 \\ 9.99988 \\ 9.99998 \end{bmatrix}$$

3	4	9.78583	9.99475	9.99988	9.99998	9.99998
2	4	9.87075	9.99721	9.99994	9.99999	9.99999
1	4	10	10	10	10	10
	1	2	3	4	5	6

Figura 6: Matriz solución para  $t = 20$  h