Ejemplo 1

Resolver

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} + x^2 &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Solución exacta

Después de integrar

$$u(x) = -\frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0) &= -\frac{1}{12}(0)^4 + c_1(0) + c_2 = 0 \\ u(1) &= -\frac{1}{12}(1)^4 + c_1(1) + c_2 = 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{12} \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

reemplazando en la solución

$$u(x) = \frac{1}{12}x - \frac{1}{12}x^4$$

Solución cuadrática aproximada

Se utilizaran tres términos en la aproximación

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \hat{u}(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 0 \\ \hat{u}(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -a_2 \end{aligned}$$

reemplazando las constantes

$$\hat{u}(x) = -a_2 x + a_2 x^2 = a_2(x^2 - x)$$

$\hat{u}_{xx}$ es

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} = 2a_2$$

la función residual es

$$R(x) = \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + x^2 = 2a_2 + x^2$$

la función ponderada es

$$W(x) = \frac{d\hat{u}}{da_2} = x^2 - x$$

la forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^1 R(x)\, W(x)\, dx = \int_0^1 (2a_2 + x^2)(x^2 - x)\, dx = 0$$

multiplicando y ordenando

$$\int_0^1 -2a_2 x + 2a_2 x^2 - x^3 + x^4\, dx = 0$$

integrando

$$\left(- a_2 x^2 + \frac{2}{3} a_2 x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Bigg|_0^1 = 0$$

reemplazando límites de integración y simplificando

$$-\frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{20}$$

despejando

$$a_2 = -\frac{3}{20}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = -\frac{3}{20}(x^2 - x) = \frac{3}{20}x - \frac{3}{20}x^2$$

Solución cúbica aproximada

Se utilizaran cuatro términos en la aproximación

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \hat{u}(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 = 0 \\ \hat{u}(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 0 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -a_2 - a_3 \end{aligned}$$

reemplazando las constantes

$$\hat{u}(x) = -a_2 x - a_3 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x)$$

lo anterior puede escribirse como

$$\hat{u}(x) = \hat{u}_1(x) + \hat{u}_2(x)$$

$\hat{u}_{xx}$ es

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3 x$$

la función residual es

$$R(x) = \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + x^2 = 2a_2 + 6a_3 x + x^2$$

la función ponderada puede escribirse como

$$W(x) = W_1(x) + W_2(x)$$

derivando respecto a las variables desconocidas

$$W_1(x) = \frac{d\hat{u}}{da_2} = x^2 - x$$
$$W_2(x) = \frac{d\hat{u}}{da_3} = x^3 - x$$

reemplazando en la función ponderada

$$W(x) = (x^2 - x) + (x^3 - x)$$

la forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^1 R(x)\, W(x)\, dx = \int_0^1 (2a_2 + 6a_3 x + x^2)[(x^2 - x) + (x^3 - x)]\, dx = 0$$

puede escribirse como la suma de integrales

$$\int_0^1 R(x)\, W_1(x)\, dx + \int_0^1 R(x)\, W_2(x)\, dx = 0$$

y también como un sistema de ecuaciones

$$\int_0^1 R(x)\, W_1(x)\, dx = 0$$
$$\int_0^1 R(x)\, W_2(x)\, dx = 0$$

reemplazando en la anterior fórmula

$$\int_0^1 (2a_2 + 6a_3 x + x^2)(x^2 - x)\, dx = 0$$
$$\int_0^1 (2a_2 + 6a_3 x + x^2)(x^3 - x)\, dx = 0$$

multiplicando y ordenando

$$\int_0^1 2a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + x^4 - 2a_2 x - 6a_3 x^2 - x^3\, dx = 0$$
$$\int_0^1 2a_2 x^3 + 6a_3 x^4 + x^5 - 2a_2 x - 6a_3 x^2 - x^3\, dx = 0$$

integrando

$$\left(\frac{2}{3}a_2 x^3 + \frac{3}{2}a_3 x^4 + \frac{1}{5}x^5 - a_2 x^2 - 2a_3 x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}a_2 x^4 + \frac{6}{5}a_3 x^5 + \frac{1}{6}x^6 - a_2 x^2 - 2a_3 x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

reemplazando límites de integración y simplificando

$$-\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{20}$$
$$-\frac{1}{2}a_2 - \frac{4}{5}a_3 = \frac{1}{12}$$

resolviendo el sistema

$$a_2 = \frac{1}{10}$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{10}(x^2 - x) - \frac{1}{6}(x^3 - x) = \frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Comparando soluciones

Se observa que la solución aproximada converge a la solución exacta