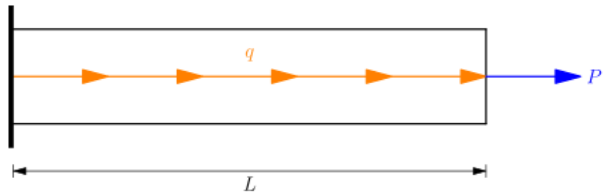
Ejemplo 2



Resolver

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$
$$u(0) = 0$$
$$u'(L) = \frac{P}{EA}$$

Solución exacta

Después de integrar

$$\frac{du}{dx} = -\frac{q}{EA}x + c_1$$
$$u = -\frac{q}{2EA}x^2 + c_1 x + c_2$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$u'(L) = -\frac{q}{EA}(L) + c_1 = \frac{P}{EA}$$
$$u(0) = -\frac{q}{2EA}(0)^2 + c_1(0) + c_2 = 0$$

resolviendo el sistema

$$c_1 = \frac{qL + P}{EA}$$
$$c_2 = 0$$

reemplazando en la solución

$$u(x) = \frac{qL + P}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Solución aproximada cuadrática

Se utilizaran tres términos en la aproximación

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

solución aproximada y su derivada

$$\hat{u} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$\frac{d\hat{u}}{dx} = a_1 + 2a_2 x$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\hat{u}(0) = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 0$$
$$\hat{u}'(L) = a_1 + 2a_2(L) = \frac{P}{EA}$$

resolviendo el sistema

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = \frac{P - 2EALa_2}{EA}$$

reemplazando las constantes

$$\hat{u}(x) = \left(\frac{P - 2EALa_2}{EA}\right)x + a_2x^2 = \frac{P}{EA}x + a_2(x^2 - 2Lx)$$

$\hat{u}_{xx}$ es

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} = 2a_2$$

la función residual es

$$R(x) = EA\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} + q = 2EA\,a_2 + q$$

la función ponderada es

$$W(x) = \frac{d\hat{u}}{da_2} = x^2 - 2Lx$$

la forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^L R(x)\,W(x)\,dx = \int_0^L (2EA\,a_2 + q)(x^2 - 2Lx)\,dx = 0$$

multiplicando y ordenando

$$\int_0^L -2qLx - 4EALa_2x + qx^2 + 2EAa_2x^2\,dx = 0$$

integrando

$$\left(-qLx^2 - 2EALa_2x^2 + \frac{q}{3}x^3 + \frac{2EAa_2}{3}x^3 \right)\Bigg|_0^L = 0$$

reemplazando límites de integración y simplificando

$$\frac{4EAL^3}{3}a_2 = -\frac{2qL^3}{3}$$

despejando

$$a_2 = -\frac{q}{2EA}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = \frac{P}{EA}x - \frac{q}{2EA}(x^2 - 2Lx) = \frac{qL + P}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Comparando soluciones

Se observa que la solución aproximada es igual a la solución exacta