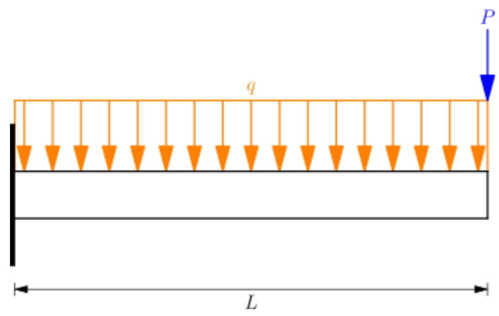
Ejemplo 3



Resolver

$$
\begin{aligned}
EI\,\frac{d^4v}{dx^4} + q = 0 \\
v(0) = 0 \qquad EIv''(L) = 0 \\
v'(0) = 0 \qquad EIv'''(L) = P
\end{aligned}
$$

Solución exacta

Después de integrar

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3v}{dx^3} &= -\frac{q}{EI}x + c_1 \\
\frac{d^2v}{dx^2} &= -\frac{q}{2EI}x^2 + c_1x + c_2 \\
\frac{dv}{dx} &= -\frac{q}{6EI}x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 \\
v &= -\frac{q}{24EI}x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4
\end{aligned}
$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$
\begin{aligned}
v'''(L) &= -\frac{q}{EI}(L) + c_1 = \frac{P}{EI} \\
v''(L) &= -\frac{q}{2EI}(L)^2 + c_1(L) + c_2 = 0 \\
v'(0) &= -\frac{q}{6EI}(0)^3 + c_1(0)^2 + c_2(0) + c_3 = 0 \\
v(0) &= -\frac{q}{24EI}(0)^4 + c_1(0)^3 + c_2(0)^2 + c_3(0) + c_4 = 0
\end{aligned}
$$

resolviendo el sistema

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{qL + P}{6EI} \\
c_2 &= -\frac{qL^2 + 2PL}{4EI} \\
c_3 &= 0 \\
c_4 &= 0
\end{aligned}
$$

reemplazando en la solución

$$
v(x) = -\frac{qL^2 + 2PL}{4EI}x^2 + \frac{P + qL}{6EI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4
$$

Solución aproximada cuartica

Se utilizaran cinco términos en la aproximación

$$v(x) \approx \hat{v}(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

solución aproximada y sus derivada

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\
\frac{d\hat{v}}{dx} &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \\
\frac{d^2\hat{v}}{dx^2} &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 \\
\frac{d^3\hat{v}}{dx^3} &= 6a_3 + 24a_4 x
\end{aligned}$$

reemplazando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
\hat{v}(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 = 0 \\
\hat{v}'(0) &= a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 = 0 \\
\hat{v}''(L) &= 2a_2 + 6a_3(L) + 12a_4(L)^2 = 0 \\
\hat{v}'''(L) &= 6a_3 + 24a_4(L) = \frac{P}{EI}
\end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= \frac{-PL + 12EIL^2 a_4}{2EI} \\
a_3 &= \frac{P - 24EIL a_4}{6EI}
\end{aligned}$$

reemplazando las constantes

$$\hat{v}(x) = \left(\frac{-PL + 12EIL^2 a_4}{2EI}\right)x^2 + \left(\frac{P - 24EIL a_4}{6EI}\right)x^3 + a_4 x^4 = -\frac{3PLx^2 - Px^3}{6EI} + a_4(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)$$

$\hat{v}_{xxxx}$ es

$$\frac{d^4\hat{v}}{dx^4} = 24a_4$$

la función residual es

$$R(x) = EI\frac{d^4\hat{v}}{dx^4} + q = 24EI\, a_4 + q$$

la función ponderada es

$$W(x) = \frac{d\hat{v}}{da_4} = 6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4$$

la forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^L R(x)\, W(x)\, dx = \int_0^L (24EI\, a_4 + q)(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4)\, dx = 0$$

multiplicando y ordenando

$$\int_0^L 6qL^2x^2 + 144EIL^2a_4x^2 - 4qLx^3 - 96EILa_4x^3 + qx^4 + 24EIa_4x^4 \, dx = 0$$

integrando

$$\left(2qL^2x^3 + 48EIL^2a_4x^3 - qLx^4 - 24EILa_4x^4 + \frac{q}{5}x^5 + \frac{24EIa_4}{5}x^5\right)\Bigg|_0^L = 0$$

reemplazando límites de integración y simplificando

$$\frac{144EIL^5}{5}a_4 = -\frac{6qL^5}{5}$$

despejando

$$a_4 = -\frac{q}{24EI}$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{v}(x) = -\frac{3PLx^2 - Px^3}{6EI} - \frac{q}{24EI}(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4) = -\frac{qL^2 + 2PL}{4EI}x^2 + \frac{P + qL}{6EI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4$$

Comparando soluciones

Se observa que la solución aproximada es igual a la solución exacta