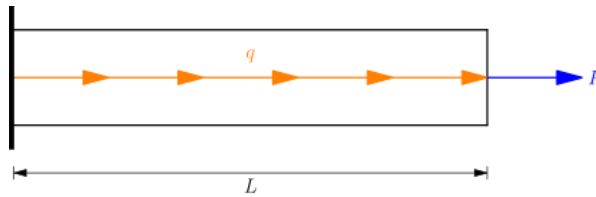


## Ejemplo 2



Resolver

$$\begin{aligned}EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ u'(L) &= \frac{P}{EA}\end{aligned}$$

Solución exacta

$$u(x) = \frac{qL + P}{EA}x - \frac{q}{2EA}x^2$$

Solución aproximada lineal

La forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_0^L R(x) W(x) dx = \int_0^L \left( EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + q \right) W dx = 0$$

reduciendo el grado de las derivadas

$$\int_0^L \frac{dW}{dx} EA \frac{d\hat{u}}{dx} dx = \int_0^L W q dx + W(L) EA \frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W(0) EA \frac{d\hat{u}(0)}{dx}$$

usando bases lineales en coordenadas locales

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = u_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + u_2 \left( \frac{x}{L} \right)$$

$\hat{u}_x$  es

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

las funciones ponderadas son

$$\begin{aligned}W_1 &= \frac{d\hat{u}}{du_1} = 1 - \frac{x}{L} \\ W_2 &= \frac{d\hat{u}}{du_2} = \frac{x}{L}\end{aligned}$$

formando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{dW_1}{dx} EA \frac{d\hat{u}}{dx} dx &= \int_0^L W_1 q dx + W_1(L) EA \frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W_1(0) EA \frac{d\hat{u}(0)}{dx} \\ \int_0^L \frac{dW_2}{dx} EA \frac{d\hat{u}}{dx} dx &= \int_0^L W_2 q dx + W_2(L) EA \frac{d\hat{u}(L)}{dx} - W_2(0) EA \frac{d\hat{u}(0)}{dx}\end{aligned}$$

funciones ponderadas y sus derivadas

$$W_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{dW_1}{dx} = -\frac{1}{L} \quad W_2 = \frac{x}{L} \quad \frac{dW_2}{dx} = \frac{1}{L}$$

valores de las funciones ponderadas en los nodos

$$W_1(L) = 0 \quad W_1(0) = 1 \quad W_2(L) = 1 \quad W_2(0) = 0$$

fuerzas en los nodos

$$EA \frac{d\hat{u}(L)}{dx} = F_2 \quad EA \frac{d\hat{u}(0)}{dx} = F_1$$

reemplazando

$$\int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right) EA \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) dx = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) q dx + 0(F_2) - 1(F_1)$$
$$\int_0^L \left(\frac{1}{L}\right) EA \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right) dx = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) q dx + 1(F_2) - 0(F_1)$$

reordenando

$$EA \left(\frac{u_1 - u_2}{L^2}\right) \int_0^L dx = \int_0^L q - \frac{q}{L} x dx - F_1$$
$$EA \left(\frac{-u_1 + u_2}{L^2}\right) \int_0^L dx = \int_0^L \frac{q}{L} x dx + F_2$$

integrando

$$EA \left(\frac{u_1 - u_2}{L}\right) = \frac{qL}{2} - F_1$$
$$EA \left(\frac{-u_1 + u_2}{L}\right) = \frac{qL}{2} + F_2$$

en forma matricial

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

reemplazando fuerzas y desplazamientos

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_1 \\ P \end{bmatrix}$$

resolviendo

$$u_2 = \frac{qL^2 + 2PL}{2EA}$$
$$F_1 = qL + P$$

reemplazando en la solución aproximada

$$\hat{u}(x) = \frac{qL^2 + 2PL}{2EA} \left(\frac{x}{L}\right) = \frac{qL + 2P}{2EA} x$$