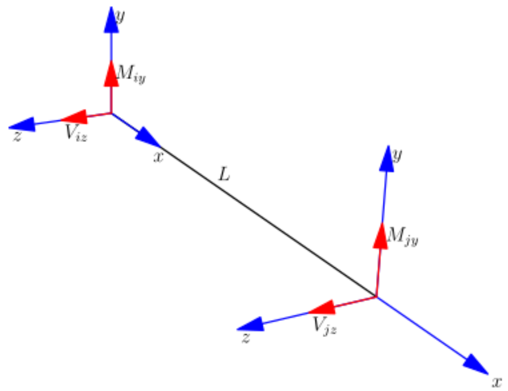
Introducción a elementos finitos
Segundo Parcial I-2017

1. Obtener la matriz de rigidez mediante el método de balance de energía con EI_y constante



Solución

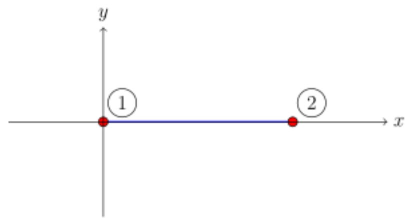
Principio de los trabajos virtuales

$$\iiint_V \varepsilon^{\mathrm{T}} \sigma \, dV - \iiint_V w^{\mathrm{T}} f_V \, dV - \iint_\Omega w^{\mathrm{T}} f_\Omega \, d\Omega - \sum_{i=1}^{n} w_i P_i = 0$$

Simplificando

$$\iiint_V \varepsilon^{\mathrm{T}} \sigma \, dV - \sum_{i=1}^{n} w_i P_i = 0$$

Usando un elemento de dos nodos



Aproximación del campo de desplazamientos

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

en forma matricial

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Aproximación de desplazamientos angulares

$$w' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

Reemplazando valores

$$\begin{aligned} w_1(0) &= \alpha_0 \\ w_1'(0) &= \alpha_1 \\ w_2(L) &= \alpha_0 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 \\ w_2'(L) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 L + 3\alpha_3 L^2 \end{aligned}$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_1'(0) \\ w_2(L) \\ w_2'(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por la inversa

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_1'(0) \\ w_2(L) \\ w_2'(L) \end{bmatrix}$$

Reemplazando en el campo de desplazamientos

$$w = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_1'(0) \\ w_2(L) \\ w_2'(L) \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$w = N \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_1'(0) \\ w_2(L) \\ w_2'(L) \end{bmatrix}$$

N es la matriz de funciones de interpolación

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 & x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 & \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 & -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{bmatrix}$$

Deformación

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2N}{dx^2} w_i \, z = -B \, w_i \, z$$

B es la matriz de deformaciones desplazamientos

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x & -\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2}x & \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x & -\frac{2}{L} + \frac{6}{L^2}x \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la fórmula de trabajo virtual

$$\int_V (-B \, w_i \, z)^{\mathrm{T}} E \, (-B \, w_i \, z) \, dV - \sum_{i=1}^{n} w_i P_i = 0$$

Simplificando

$$\int_0^L B^{\mathrm{T}} EI \, B \, dx \, w_i - \sum_{i=1}^{n} P_i = 0$$

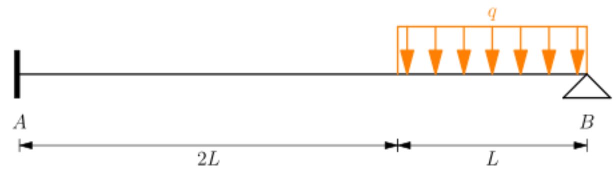
La matriz de rigidez de un elemento es

$$K = \int_0^L B^{\mathrm{T}} \, EI \, B \, dx$$

Reemplazando B, multiplicando, integrando y factorizando

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

2. Resolver la estructura por cualquier método



Solución

Estructura equivalente

Suma de fuerzas y momentos

$$V_A - qL + V_B = 0$$
$$M_A - qL\left(\frac{5L}{2}\right) + V_B(3L) = 0$$

Despejando V_A y M_A

$$V_A = qL - V_B$$
$$M_A = \frac{5qL^2}{2} - 3LV_B$$

Momento de $0 \leqslant x \leqslant 2L$

$$M = -M_A + V_A x = -\frac{5qL^2}{2} + 3LV_B + (qL - V_B)x$$

Momento de $2L \leqslant x \leqslant 3L$

$$M = -M_A + V_A x - \frac{q}{2}(x-2L)^2 = -\frac{9qL^2}{2} + 3LV_B + 3qLx - V_B x - \frac{q}{2}x^2$$

Energía de deformación por flexión

$$U_i = \int_0^{2L} \frac{M^2}{2EI}\, dx + \int_{2L}^{3L} \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} U_i = {} & \frac{1}{2EI}\int_0^L \left[-\frac{5qL^2}{2} + 3LV_B + (qL - V_B)x\right]^2 dx \\ & + \frac{1}{2EI}\int_L^{2L}\left(-\frac{9qL^2}{2} + 3LV_B + 3qLx - V_B x - \frac{q}{2}x^2\right)^2 dx \end{aligned}$$

Integrando

$$U_i = \frac{L^3}{120EI}\left(313q^2L^2 - 815qLV_B + 540V_B^2\right)$$

Minimizando

$$\frac{dU_i}{dV_B} = -\frac{L^3}{24EI}\left(163qL - 216V_B\right) = 0$$

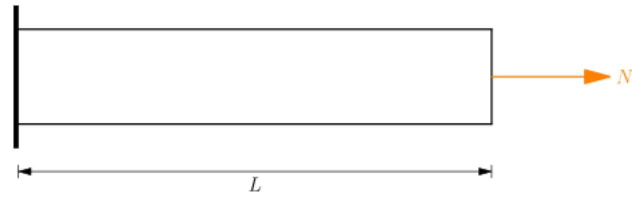
Despejando V_B

$$V_B = \frac{163qL}{216}$$

Reemplazando en las demás reacciones

$$\begin{aligned} V_A &= qL - V_B = qL - \frac{163qL}{216} = \frac{53qL}{216} \\ M_A &= \frac{5qL^2}{2} - 3LV_B = \frac{5qL^2}{2} - 3L\left(\frac{163qL}{216}\right) = \frac{17qL^2}{72} \end{aligned}$$

3. Obtener la matriz de rigidez mediante el método de balance de energía con EA constante



Solución

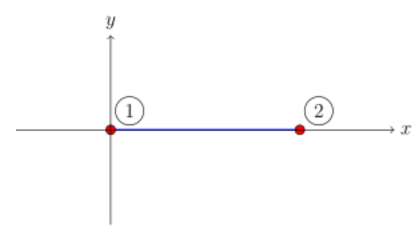
Principio de los trabajos virtuales

$$\iiint_V \varepsilon^{\mathrm{T}} \sigma\, dV - \iiint_V u^{\mathrm{T}} f_V\, dV - \iint_\Omega u^{\mathrm{T}} f_\Omega\, d\Omega - \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = 0$$

Simplificando

$$\iiint_V \varepsilon^{\mathrm{T}} \sigma\, dV - \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = 0$$

Usando un elemento de dos nodos



Aproximación del campo de desplazamientos

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

en forma matricial

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando valores

$$\begin{aligned} u_1(0) &= \alpha_0 \\ u_2(L) &= \alpha_0 + \alpha_1 L \end{aligned}$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por la inversa

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(L) \end{bmatrix}$$

Reemplazando en el campo de desplazamientos

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(L) \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{L}x & \frac{1}{L}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(L) \end{bmatrix}$$

N es la matriz de funciones de interpolación

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{L}x & \frac{1}{L}x \end{bmatrix}$$

Deformación

$$\varepsilon_x = \frac{dN}{dx} u_i = B\, u_i$$

B es la matriz de deformación desplazamiento

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la fórmula de trabajo virtual

$$\int_0^L (B\, u_i)^{\mathrm{T}} E\, (B\, u_i)\, dV - \sum_{i=1}^{n} u_i P_i = 0$$

Simplificando

$$\int_0^L B^{\mathrm{T}} E A\, B\, dx\, u_i - \sum_{i=1}^{n} P_i = 0$$

La matriz de rigidez de un elemento es

$$K = \int_0^L B^{\mathrm{T}}\, E A\, B\, dx$$

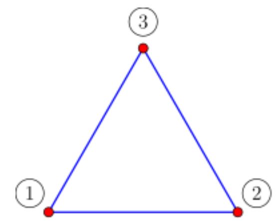
Reemplazando B

$$K = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} EA \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

Multiplicando, integrando y factorizando

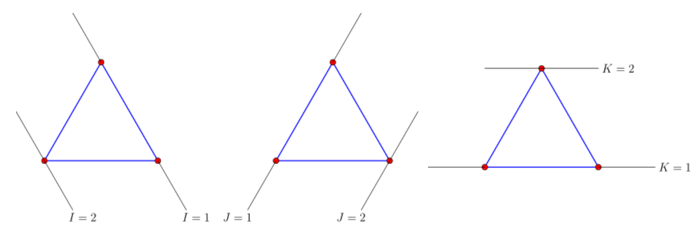
$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Calcular las funciones de forma



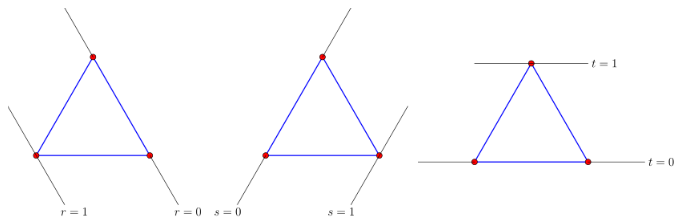
Solución

Numeración de nodos



$$\textcircled{1} = [I_1, J_1, K_1] = [2, 1, 1] \quad \textcircled{3} = [I_3, J_3, K_3] = [1, 1, 2]$$
$$\textcircled{2} = [I_2, J_2, K_2] = [1, 2, 1]$$

Coordenadas de nodos



$$\textcircled{1} = [r_2, s_1, t_1] = [1, 0, 0] \quad \textcircled{3} = [r_1, s_1, s_2] = \left[0, 0, 1\right]$$
$$\textcircled{2} = [r_1, s_2, t_1] = [0, 1, 0]$$

Nodo ①, $I = 2,\ J = 1,\ K = 1$

$$N_1(r, s, t) = T_2(r)T_1(s)T_1(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_2(r) = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{r - 0}{1 - 0} = r$$
$$T_1(s) = 1$$
$$T_1(t) = 1$$

Reemplazando polinomios

$$N_1 = r \cdot 1 \cdot 1 = r$$

Nodo ②, $I = 1,\ J = 2,\ K = 1$

$$N_2(r, s, t) = T_1(r)T_2(s)T_1(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_1(r) = 1$$
$$T_2(s) = \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{s - 0}{1 - 0} = s$$
$$T_1(t) = 1$$

Reemplazando polinomios

$$N_2 = 1 \cdot s \cdot 1 = s$$

Nodo ③, $I = 1,\ J = 1,\ K = 2$

$$N_3(r, s, t) = T_1(r)T_1(s)T_2(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_1(r) = 1$$
$$T_1(s) = 1$$
$$T_2(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{t - 0}{1 - 0} = t$$

Reemplazando polinomios

$$N_3 = 1 \cdot 1 \cdot t = t$$