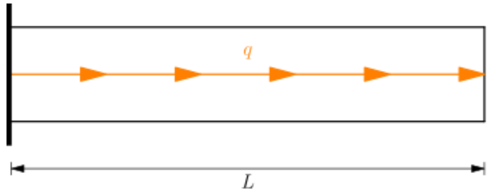
Introducción a elementos finitos
Examen final I-2016 Segunda opción

1. Resolver la estructura con E, I, A constantes por el método de Ritz



Solución

La solución exacta es un polinomio de segundo grado, la aproximación del campo de desplazamientos será

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Reemplazando $u(0) = 0$ y $u'(L) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)^2 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 L &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_1 &= -2L\alpha_2 \end{aligned}$$

Reemplazando en el campo de desplazamientos

$$u = -2L\alpha_2 x + \alpha_2 x^2$$

Carga distribuida

$$F = q$$

La deformación unitaria es

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = -2L\alpha_2 + 2\alpha_2 x$$

El funcional de energía es

$$\pi = \int_0^L \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sigma\,dV - \int_0^L F\,u\,dx = \int_0^L \frac{1}{2} EA\,\varepsilon^2\,dx - \int_0^L F\,u\,dx$$

Reemplazando

$$\pi = \int_0^L \frac{EA}{2}\left(-2L\alpha_2 + 2\alpha_2 x\right)^2 dx - \int_0^L q\left(-2L\alpha_2 x + \alpha_2 x^2\right) dx$$

Integrando

$$\pi = \frac{2EAL^3}{3}\,\alpha_2^2 + \frac{2qL^3}{3}\,\alpha_2$$

Minimizando el funcional

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_2} = \frac{4EAL^3}{3}\,\alpha_2 + \frac{2qL^3}{3} = 0$$

Reordenando

$$\frac{4EAL^3}{3}\,\alpha_2 = -\frac{2qL^3}{3}$$

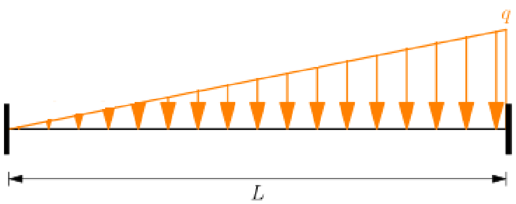
Resolviendo

$$\alpha_2 = -\frac{q}{2EA}$$

Reemplazando en u

$$u = \frac{qL}{EA}\,x - \frac{q}{2EA}\,x^2 = \frac{q}{EA}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right)$$

2. Calcular las funciones de forma $\boldsymbol{N}$ y el vector de carga $\boldsymbol{F}$ mediante el método de balance de energía



Solución

Funciones de forma

Aproximación del campo de desplazamientos

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento angular

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

Reemplazando $v(0) = v_1$, $\theta(0) = \theta_1$, $v(L) = v_2$ y $\theta(L) = \theta_2$

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)^2 + \alpha_3(0)^3 &= v_1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2(0) + 3\alpha_3(0)^2 &= \theta_1 \\ \alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2 + \alpha_3(L)^3 &= v_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2(L) + 3\alpha_3(L)^2 &= \theta_2 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= v_1 \\ \alpha_1 &= \theta_1 \\ \alpha_0 + L\alpha_1 + L^2\alpha_2 + L^3\alpha_3 &= v_2 \\ \alpha_1 + 2L\alpha_2 + 3L^2\alpha_3 &= \theta_2 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en el campo de desplazamientos

$$v = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando

$$v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 & x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 & \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 & -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Las funciones de forma son

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ N_2 &= x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ N_3 &= \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ N_4 &= -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{aligned}$$

Vector de carga

$$\boldsymbol{F} = \int_0^L f\,\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\,dx$$

La carga es

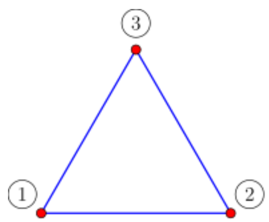
$$f = \frac{q}{L}x$$

Reemplazando e integrando

$$\boldsymbol{F} = \int_0^L \frac{q}{L}x \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{L^2}x^2 + \frac{2}{L^3}x^3 \\ x - \frac{2}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ \frac{3}{L^2}x^2 - \frac{2}{L^3}x^3 \\ -\frac{1}{L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \frac{3qL}{20} \\ \frac{qL^2}{30} \\ \frac{7qL}{20} \\ -\frac{qL^2}{20} \end{bmatrix}$$

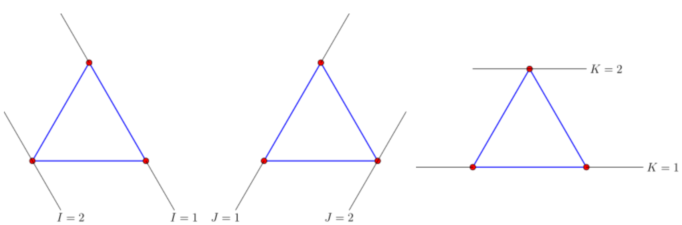
Reemplazando

3. Calcular las funciones de forma $\boldsymbol{N}$



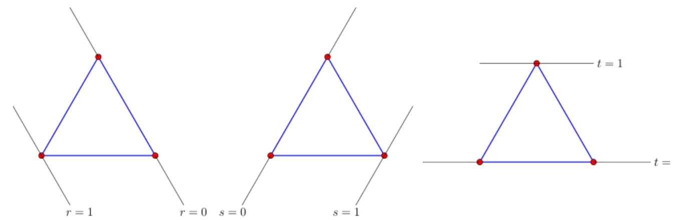
Solución

Numeración de nodos



$$①=[I_1,J_1,K_1]=[2,1,1] \quad ③=[I_3,J_3,K_3]=[1,1,2]$$
$$②=[I_2,J_2,K_2]=[1,2,1]$$

Coordenadas de nodos



$$①=[r_2,s_1,t_1]=[1,0,0] \quad ③=[r_1,s_1,s_2]=\Big[0,0,1\Big]$$
$$②=[r_1,s_2,t_1]=[0,1,0]$$

Nodo ①, $I=2,\ J=1,\ K=1$

$$N_1(r,s,t)=T_2(r)T_1(s)T_1(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_2(r)=\frac{r-r_1}{r_2-r_1}=\frac{r-0}{1-0}=r$$
$$T_1(s)=1$$
$$T_1(t)=1$$

Reemplazando polinomios

$$N_1=r\cdot 1\cdot 1=r$$

Nodo ②, $I=1,\ J=2,\ K=1$

$$N_2(r,s,t)=T_1(r)T_2(s)T_1(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_1(r)=1$$
$$T_2(s)=\frac{s-s_1}{s_2-s_1}=\frac{s-0}{1-0}=s$$
$$T_1(t)=1$$

Reemplazando polinomios

$$N_2=1\cdot s\cdot 1=s$$

Nodo ③, $I = 1,\ J = 1,\ K = 2$

$$N_3(r, s, t) = T_1(r)T_1(s)T_2(t)$$

Reemplazando coordenadas

$$T_1(r) = 1$$
$$T_1(s) = 1$$
$$T_2(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{t - 0}{1 - 0} = t$$

Reemplazando polinomios

$$N_3 = 1 \cdot 1 \cdot t = t$$

4. Defina que es funcional

Solución

Un funcional es una función de funciones