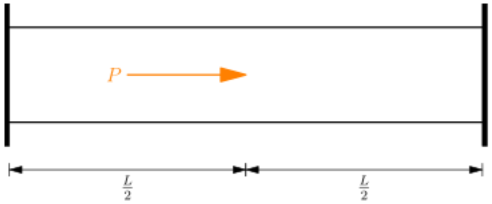
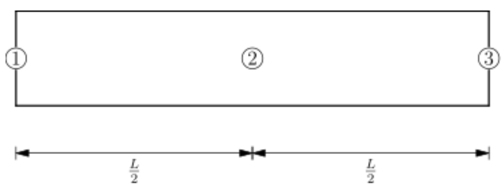
Introducción a elementos finitos
Tarea 7 I-2016

Resolver la estructura con E, A constantes por el método de Ritz



Solución

Numeración de nodos



Campo de desplazamientos

$$u(x) \approx \phi(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)^2$$

Funciones test o trial

$$g_0(x) = x^0 \quad g_1(x) = x^1$$
$$g_2(x) = x^2$$

Reemplazando

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Reemplazando $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$

$$\alpha_0 + \alpha_1(0) + \alpha_2(0)^2 = 0$$
$$\alpha_0 + \alpha_1(L) + \alpha_2(L)^2 = 0$$

Simplificando

$$\alpha_0 = 0$$
$$\alpha_1 + L\,\alpha_2 = 0$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\alpha_0 = 0$$
$$\alpha_1 = -L\,\alpha_2$$

La aproximación del campo de desplazamientos será

$$u = -L\,\alpha_2 x + \alpha_2 x^2$$

La deformación unitaria es

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -L\,\alpha_2 + 2\,\alpha_2 x$$

La normal es

$$N = N \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$$
$$N = N - P \qquad \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L$$

Desplazamientos en los nodos

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = -\frac{L^2}{2}\alpha_2 + \frac{L^2}{4}\alpha_2 = -\frac{L^2}{4}\alpha_2$$
$$u_3 = 0$$

Reemplazando en el funcional

$$
\begin{aligned}
\pi &= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2}\, EA\, \varepsilon_x^2\, dx - N(u_2 - u_1) + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{1}{2}\, EA\, \varepsilon_x^2\, dx - (N - P)(u_3 - u_2) \\
&= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2}\, EA\, \varepsilon_x^2\, dx - N(u_2 - 0) + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{1}{2}\, EA\, \varepsilon_x^2\, dx - (N - P)(0 - u_2) \\
&= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2}\, EA(-L\,\alpha_2 + 2\,\alpha_2 x)^2\, dx - N\left(-\frac{L^2}{4}\alpha_2\right) \\
&\quad + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{1}{2}\, EA(-L\,\alpha_2 + 2\,\alpha_2 x)^2\, dx - (N - P)\left(\frac{L^2}{4}\alpha_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\, EA\,\alpha_2^2 \int_0^L L^2 - 4Lx + 4x^2\, dx + \frac{1}{4} P L^2\,\alpha_2
\end{aligned}
$$

Integrando

$$
\pi = \frac{1}{6}\, EA\, L^3 \alpha_2^2 + \frac{1}{4} P L^2\, \alpha_2
$$

Minimizando el funcional

$$
\frac{d\pi}{d\alpha_2} = \frac{1}{3}\, EA\, L^3 \alpha_2 + \frac{1}{4} P L^2 = 0
$$

Despejando α_2

$$
\alpha_2 = -\frac{3P}{4\, LEA}
$$

Reemplazando en u

$$
u = \frac{3P}{4\, EA} x - \frac{3P}{4\, LEA} x^2
$$